Dirichlet series associated with wave forms on GL(2,H)(Automorphic Forms and Related Topics)

高瀬, 幸一

数理解析研究所講究録
617巻 1987年 130-139

Dirichlet series associated with wave forms on GL(2,H)

東工大・理学部 高瀬幸一 (Koichi Takase)

§1. wave form.

1-1. B を $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環として，その判別式を $D(B)=d(B)^2$，極大整環 $O\subset B$ を一つ固定する。$B_p=B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ $(p\leq\infty)$ とおく。G は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で，$G_{\mathbb{Q}}=GL(2,B)$ とする。G の $\mathbb{Q}$ 上のアデール化を $G_A=\prod'_{p\leq\infty}G_p$ とおく（$G_p=G_{\mathbb{Q}_p}=GL(2,B_p)$）。

$$K_p=\begin{cases}\{g\in G_\infty \mid g^*g=1\} & : p=\infty \quad \left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\bar a&\bar c\\\bar b&\bar d\end{pmatrix}\right)\\ GL(2,O_p) & : p<\infty \quad (O_p=O\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p\subset B_p)\end{cases}$$

として，$K=\prod_{p\leq\infty}K_p\subset G_A$ とおく。K_∞ は G_∞ の極大コンパクト部分群であり，$p<\infty$ に対して，K_p は G_p の極大開コンパクト部分群である。

1-2. $GL(2,B)$ 上の wave form の空間 $A(\omega,\rho)$ を次の様に定義する；

__定義__ ユニタリ指標 $\omega\in\widehat{\mathbb{Q}_A^\times/\mathbb{Q}^\times}$ と $\rho\in\mathbb{C}$ に対して，G_A から $\mathbb{C}$ への連続関数 Φ で，次の条件 1)～3) を充すもの全体を $A(\omega,\rho)$ とする；

1) $\forall z \in \mathbb{Q}_A^\times$, $\forall \gamma \in G_\mathbb{Q}$, $\forall k \in K$ に対して，$\Phi(z\gamma g k) = \omega(z)\cdot\Phi(g)$,

2) G_∞ 上の関数としては実解析的で，実 Lie 群 $SL(2, B_\infty)$ の Casimir operator D に対して，$D\cdot\Phi = \frac{1}{8}\cdot(p^2-4)\cdot\Phi$,

3) $\forall M \subset G_A$: compact subset に対して，$c>0$, $r\geqq 0$ があって，$\forall g \in M$, $\forall y \in \mathbb{Q}_A^\times$ に対して，$\left|\Phi\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot g\right)\right| \leqq c\cdot \mathrm{Max}\{|y|_A^r, |y|_A^{-r}\}$.

上の定義で，$A(\omega, p)\neq 0$ とすると，$\mathbb{Q}_A^\times$ の idele norm $|\cdot|_A$ に対して，$\omega = |\cdot|_A^\sigma$ ($\sigma\in\sqrt{-1}\cdot\mathbb{R}$) となるから，$\Phi\in A(1, p)$ に対して

$$\tilde{\Phi}(g) = |N(g)|_A^{\sigma/4}\cdot\Phi(g) \qquad (N : M(2, B) \text{ の reduced norm})$$

とおくと，$\mathbb{C}$ 上の線形同型 $A(1, p) \ni \Phi \mapsto \tilde{\Phi} \in A(\omega, p)$ を得る。

<u>注意</u>　B_∞ の $\mathbb{R}$-base $\{1, i, j, k\}$ ($i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$) を取って $x = x_1 + x_2\cdot i + x_3\cdot j + x_4\cdot k \in B_\infty$ ($x_j\in\mathbb{R}$) とおくと，Casimir operator D の作用は次の様になる；G_∞/K_∞ 上の C^∞-関数 φ に対して，

$$F(x, y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\right) \quad \text{for } x\in B_\infty,\ 0<y\in\mathbb{R}$$

とおくと，

$$(D\cdot\varphi)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\left\{y^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3\cdot y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + y^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)\right\}F.$$

ここで，$SL(2, B_\infty)$ の岩沢分解

$$SL(2, B_\infty) = N\cdot A\cdot K_1 \qquad N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in B_\infty\right\},\ A = \left\{\begin{pmatrix}\sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix} \,\middle|\, 0<y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$K_1 = K_\infty \cap SL(2, B_\infty)$$

に注意する。

1-3. $t \in B_\infty$ に対して，G_∞ から $\mathbb{C}$ への実解析的関数 W で，次の条件 1)〜4) を充すもの全体を $W_t(p)$ と書く；

1) $\forall z \in \mathbb{Q}_\infty^\times$, $\forall k \in K_\infty$ に対して，$W(z \cdot g \cdot k) = W(g)$,

2) $D \cdot W = \frac{1}{8} \cdot (p^2 - 4) \cdot W$,

3) $\forall x \in B_\infty$ に対して，$W(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\, tr(\bar{t}x)) \cdot W(g)$ （tr : B の reduced trace),

4) $\forall M \subset G_\infty$: compact subset に対して，$c > 0$, $r \geqq 0$ があって，$\forall g \in M$, $\forall y \in \mathbb{Q}_\infty^\times$ に対して，$\left| W(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g) \right| \leqq c \cdot \mathrm{Max}\{ |y|^r, |y|^{-r} \}$。

すると，

$$\dim_{\mathbb{C}} W_t(p) = \begin{cases} 1 & : t \neq 0 \\ 2 & : t = 0 \end{cases}$$

で，$t \neq 0$ ならば，modified Bessel function

$$K_p(z) = \int_0^\infty e^{-z \cdot \cosh t} \cdot \cosh(pt)\, dt \qquad \text{for } \mathrm{Re}\, z > 0$$

を用いて，

$$W_t(p) = \langle W_{p,t} \rangle_{\mathbb{C}} \qquad W_{p,t}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K_p(4\pi \cdot |t| \cdot y) \cdot (4\pi \cdot |t| \cdot y)^2 \quad \begin{pmatrix} 0 < y \in \mathbb{R} \\ |t| = N(t)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

又，$t = 0$ ならば，

$$W_t(p) = \langle W_p^{(1)}, W_p^{(2)} \rangle_{\mathbb{C}} \quad \begin{cases} W_p^{(1)}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y^{2+p} \\ W_p^{(2)}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} y^{2-p} & : p \neq 0 \\ y^2 \cdot \log y & : p = 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (0 < y \in \mathbb{R})$$

となる。

さて，$\Phi \in A(1, P)$ に対して，Fourier 展開

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g) = \sum_{t \in B} \Phi_t(g) \cdot \Lambda(tr(\bar{t}x)) \quad \text{for } x \in B_A,\ g \in G_A$$

を考える。ここで，Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ のユニタリ指標で $\Lambda_\infty(x)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}x)$ なるものとし，tr は B の reduced trace とする。$^\forall t\in B$ に対して，Φ_t は G_∞ 上の関数としては $W_t(p)$ の元だから，$t\neq 0$ のときは，

$$\Phi_t(g)=C_t(\Phi,g_f)\cdot W_{p,t}(g_\infty)\quad \text{for } g\in G_A$$

として，$t=0$ のときは

$$\Phi_0\left(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)=C_0^{(1)}\left(\Phi,\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)\cdot W_p^{(1)}\begin{pmatrix}|y|_A&0\\0&1\end{pmatrix}+C_0^{(2)}\left(\Phi,\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)\cdot W_p^{(2)}\begin{pmatrix}|y|_A&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{for } y\in\mathbb{Q}_A^\times,\ \alpha,\beta\in B_f^\times\subset B_A^\times : \text{finite part}$$

とおく。

1-4. $p<\infty$ に対して，G_p から $\mathbb{C}$ への両側 K_p-不変，support compact なる連続関数の全体 $\mathcal{L}(G_p,K_p)$ は，convolution $\varphi*\psi(g)=\int_{G_p}\varphi(x)\cdot\psi(x^{-1}g)\,d_px$ により，単位元をもつ可換な $\mathbb{C}$-algebra となる（d_px は G_p 上の Haar measure で $\int_{K_p}d_px=1$ とする）。$\mathcal{L}(G_p,K_p)$ の $\mathbb{C}$-algebra としての構造は良くわかっている（c.f. Satake [2]）；$p\mid D(B)$ ならば，prime element $\pi_p\in B_p$ を一つ固定したとき，double coset $K_p\cdot\begin{pmatrix}\pi_p&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot K_p$ (resp. $K_p\cdot\begin{pmatrix}\pi_p&0\\0&\pi_p\end{pmatrix}\cdot K_p$) の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(1)}$ (resp. $\zeta_p^{(2)}$) とすると，

$$\mathcal{L}(G_p,K_p)=\mathbb{C}[\zeta_p^{(1)},\zeta_p^{(2)\pm1}]。$$

又，$p\nmid D(B)$ のときは，$B_p=M(2,\mathbb{Q}_p)$ と同一視したときに，$O_p=M(2,\mathbb{Z}_p)$ となる様にできて，$G_p=GL(4,\mathbb{Q}_p)$，$K_p=GL(4,\mathbb{Z}_p)$ と同一視したとき，double coset $K_p\cdot\text{diagonal}(\underbrace{p,\cdots,p}_{k\text{つ}},1,\cdots,1)\cdot K_p$ の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(k)}$ とすると，

$$\mathcal{L}(G_p,K_p)=\mathbb{C}[\zeta_p^{(1)},\zeta_p^{(2)},\zeta_p^{(3)},\zeta_p^{(4)\pm1}]$$

となる。

$\mathcal{L}(G_p, K_p)$ は，$\mathcal{A}(1,p)$ 上に

$$\psi\cdot\Phi(g) = \int_{G_p}\Phi(g\cdot x)\cdot\psi(x)\,d_p x \quad \text{for } \psi\in\mathcal{L}(G_p,K_p),\ \Phi\in\mathcal{A}(1,p)$$

により作用する。よって，制限テンソル積 $\mathcal{L}(G,K) = \bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{L}(G_p,K_p)$ が $\mathcal{A}(1,p)$ 上に作用する。

§2. Mellin 変換

2-1. $B_A^\times$ の finite part を $B_f^\times$ として，$O_f^\times = \prod_{p<\infty} O_p^\times \subset B_f^\times$ とおくと，$B^\times\backslash B_f^\times/O_f^\times$ は有限集合であるが，$\Phi\in\mathcal{A}(1,p)$ と連続関数 $\varphi : (B^\times\backslash B_f^\times/O_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して，

$$L(\Phi,\varphi;s) = \sum_{t\in B^\times}\ \sum_{\alpha,\beta\in B^\times\backslash B_f^\times/O_f^\times} c_t\left(\Phi,\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)\cdot\varphi(\alpha,\beta)\cdot|N(\alpha t\beta^{-1})|_f^s$$

$$Z(\Phi,\varphi;s) = \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+1+\frac{p}{2}\right)\cdot\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+1-\frac{p}{2}\right)\cdot L(\Phi,\varphi;s)$$

とおく。ここで，N は B の reduced norm，$|\cdot|_f$ は $\mathbb{Q}_A^\times$ の idele norm の finite part，$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s}\cdot\Gamma(s)$ とおく。すると，

$$Z(\Phi,\varphi;s) = \sum_{\alpha,\beta\in B^\times\backslash B_f^\times/O_f^\times} |N(\alpha\beta^{-1})|_f^s\cdot\varphi(\alpha,\beta)\cdot\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{Q}_A^\times}(\Phi-\Phi_0)\begin{pmatrix}y\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\cdot|y|_A^{2s}\,d^\times y$$

と書けて，Φ の保型性

$$\Phi\begin{pmatrix}y\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \Phi\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & y\alpha\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}y^{-1}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad \text{for } y\in\mathbb{Q}_A^\times,\ \alpha,\beta\in B_f^\times$$

から，Mellin 変換の方法により，次の定理を得る；

<u>定理 1</u> 1) $Z(\Phi, \varphi; s)$ は全 s-平面に有理形に解析接続され，関数等式 $Z(\Phi, \varphi; s) = Z(\Phi, \check{\varphi}; -s)$ をもつ。ここで $\check{\varphi}(x, y) = \varphi(y, x)$.

2)
$$Z(\Phi, \varphi; s) + \zeta_0^{(1)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2+\rho)^{-1} - \zeta_0^{(1)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2-\rho)^{-1}$$
$$+\begin{cases} \zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2-\rho)^{-1} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2+\rho)^{-1} & : \rho \neq 0 \\ -\zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2)^{-2} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2)^{-2} & : \rho = 0 \end{cases}$$

は全 s-平面で正則である。ここで

$$\zeta_0^{(j)}(\Phi, \varphi) = \sum_{\alpha, \beta \in B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times} \zeta_0^{(j)}\left(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right)\cdot\varphi(\alpha, \beta) \qquad (j = 1, 2)。$$

2-2. $\alpha \in B_f^\times$ に対して，$O_\ell(\alpha) = B \cap (B_\infty \times \alpha\cdot O_f\cdot\alpha^{-1})$ とおく。即ち，$\alpha = (\alpha_p)_{p<\infty} \in B_f^\times$ に対して，right O-ideal $(\alpha) \subset B$ が一意的に存在して，$(\alpha)\cdot O_p = \alpha_p\cdot O_p$ for $\forall p < \infty$ となる。このとき $O_\ell(\alpha) = \{x \in B \mid x\cdot(\alpha) \subset (\alpha)\}$ である。ここで $O_\ell(\alpha)^\times$ は有限群だから，$\varepsilon(\alpha) = |O_\ell(\alpha)|^{-1}$ とおくと，ε は $B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times$ 上の関数となる。

$\Phi \in A(1, \rho)$ と連続関数 $\varphi : (B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \int_{B^\times \backslash B_f^\times} \Phi_1\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot\varphi(x\cdot y_f, x)\, d^\times x \quad \text{for } y \in B_A^\times$$

とおくと，

$$Z(\Phi, \varphi\cdot(\varepsilon\times\varepsilon); s) = \int_{B_A^\times} \hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot|N(y)|_A^s\, d^\times y$$

と書けて，これを用いると，次の定理を得る；

<u>定理2.</u> $\Phi \in \mathcal{A}(1,P)$ は Hecke eigen form で $\psi \cdot \Phi = \lambda(\psi)\cdot\Phi$ for ${}^\forall\psi \in \mathcal{L}(G,K)$ とする。このとき任意の連続関数 $\varphi : (B^\times\backslash B_f^\times/\mathcal{O}_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して，

$$L(\Phi, \varphi\cdot(\xi\times\xi); s) = \hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix}\mathcal{D} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times d(B)^s \cdot \prod_{p<\infty} H_p(\lambda, p^{-(s+2)})^{-1}$$

となる。ここで

$$H_p(\lambda, T) = \begin{cases} 1-\lambda(\zeta_p^{(1)})\cdot T + p^2T^2 & : p \mid D(B) \\ 1-\lambda(\zeta_p^{(1)})\cdot T + \lambda(\zeta_p^{(2)})\cdot pT^2 - \lambda(\zeta_p^{(3)})\cdot p^3T^3 + p^6T^4 & : p \nmid D(B) \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \prod_{p\mid D(B)} \pi_p^{-1} \in B_f^\times \quad (\pi_p \in B_p : \text{prime element for } p \mid D(B))$$

とおく。

<u>注意1.</u> <u>定理2</u>で，$p \nmid D(B)$ に対する $H_p(\lambda, T)$ は，$GL(2, B_p) = GL(4, \mathbb{Q}_p)$ の standard な Euler p-factor である (c.f. Satake [2])。

<u>注意2.</u> simple algebra の乗法群上の保型形式（保型表現）に附随する standard な Euler p-factor から定まる L-関数は，Godement-Jacquet [1] により扱われている。

§3. Rankin-Selberg の方法.

3-1. G' は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で

$$G'_\mathbb{Q} = \{ g \in GL(2,B) \mid g^*\cdot J\cdot g = \nu(g)\cdot J,\ \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times \} \quad \left(J = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

なるものとする。$P' = \left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix} \in G'\right\}$ は，G' の $\mathbb{Q}$ 上定義された minimal parabolic subgroup である。$\mathbb{Q}$ 上のアデール化 G'_A は G_A の閉部分群で，$K' = K \cap G'_A$ とおく。$G'_A = P'_A \cdot K'$ となるから，$g \in G'_A$

に対して，$g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix} \cdot k \quad (k \in K')$ とおくと，$\alpha(g) \cdot \delta(g)^{-1} \in \mathbb{Q}_A^\times$ となる。

Eisenstein series

$$E(g, s) = \sum_{\gamma \in P'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_{\mathbb{Q}}} |\alpha(\gamma g) \cdot \delta(\gamma g)^{-1}|_A^{s+\frac{3}{2}} \qquad (g \in G'_A,\ s \in \mathbb{C})$$

は $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$ で絶対収束し，全 s-平面へ有理形に解析接続され，

$$G(g, s) = d(B)^s \cdot (1+2s) \cdot \prod_{p | D(B)} (1 - p^{-(1+2s)}) \cdot Z(1+2s) \cdot Z(\tfrac{3}{2}+s) \cdot E(g, s)$$

$$(\, Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\tfrac{s}{2}) \cdot \zeta(s) \,)$$

とおくと，関数等式 $G(g, s) = G(g, -s)$ をもつ。

3-2. $\Phi \in A(1, \rho)$ は cuspidal (i.e. $\Phi_0 = 0$) であるとして，

$$Z_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in G'_\infty \;\middle|\; 0 < \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset G'_A$$

$$\tilde{\Phi}_1(g) = \int_{B^\times \backslash B_f^\times} \Phi_1\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot g \right) d^\times x \quad \text{for } g \in G_A$$

とおくと，

$$\int_{Z_\infty^+ G'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot E(g, s)\, dg = \int_{\mathbb{Q}_A^\times} \tilde{\Phi}_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^{s-\frac{3}{2}} d^\times y$$

となる。これを用いて，次の定理を得る；

<u>定理 3.</u> $\Phi \in A(1, \rho)$ は cuspidal Hecke eigen form として，$\psi \cdot \Phi = \lambda(\psi) \cdot \Phi$ for ${}^\forall \psi \in \mathcal{L}(G, K)$ とすると，

$$\int_{Z_\infty^+ G'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot G(g, s)\, dg \times Z(s+\tfrac{1}{2})$$

$$= \tilde{C}_1(\Phi) \times d(B)^s \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\tfrac{3}{2}) \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\tfrac{1}{2}+\rho) \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\tfrac{1}{2}-\rho) \cdot \prod_{p<\infty} \tilde{H}_p(\lambda, p^{-(s+\frac{7}{2})})^{-1}$$

となる。ここで

$$\tilde{\zeta}_1(\Phi) = \int_{B^\times \backslash B_f^\times} \zeta_1\left(\Phi, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) d^\times x$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad Z(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \cdot \zeta(s).$$

又、Euler factor $\tilde{H}_p(\lambda, T)$ は次の様に定める；$p \mid D(B)$ のとき、
定理2 の Euler p-factor

$$H_p(\lambda, T) = 1 - \lambda(\mathcal{C}_p^{(1)})T + p^2 T^2 = (1-\alpha T)(1-\beta T)$$

に対して、

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = (1-\alpha^2 pT)(1-\alpha\beta pT)(1-\beta^2 pT)(1-p^2 T)$$

とおく。$p \nmid D(B)$ のときは、定理2 の Euler p-factor

$$H_p(\lambda, T) = 1 - \lambda(\mathcal{C}_p^{(1)})T + \lambda(\mathcal{C}_p^{(2)}) \cdot pT^2 - \lambda(\mathcal{C}_p^{(3)})p^3T^3 + p^6T^4$$

$$= (1-\alpha_1 T)(1-\alpha_2 T)(1-\alpha_3 T)(1-\alpha_4 T)$$

に対して、$GL(4, \mathbb{C})$ の $V = \{X \in Mat(4, \mathbb{C}) \mid {}^tX = -X\}$ 上の表現 ρ を
$\rho(g) \cdot X = g \cdot X \cdot {}^tg$ により定めたとき、

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = \det\left(1 - \rho\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot T\right)$$

とおく。

注意　定理3 において、$\tilde{\zeta}_1(\Phi) \neq 0$ とすると、${}^\forall p \nmid D(B)$ に対して
$\lambda(\mathcal{C}_p^{(1)}) = \lambda(\mathcal{C}_p^{(3)})$ となる。これは Φ が old form であることを示している。即ち、Φ は $B^\times$ 上の保型形式からの lifting で、$p \nmid D(B)$ なる p-local 表現の対応は、L-group の対応 $Sym^3 : GL(2, \mathbb{C}) \to GL(4, \mathbb{C})$ に

附随するものと思われる。

一方，一般の（old form でない）$\Phi \in A(\Gamma, \rho)$ に対して定理3を意味あるものにするためには，$E(g, s)$ の代りに，$\mathfrak{P}'$ の Levi part 上の保型形式でひねった Eisenstein series を用いればよい。

以上二点については，尚若干の考察を要する。

References.

[1] Godement,R. and Jacquet,H.: Zeta Functions of Simple Algebras. Lecture Notes in Math. 260 (1972) Springer-Verlag.

[2] Satake,I.: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields. Inst.Hautes Etudes Sci. Publ.Math. 18 (1963) 5-69.